**Comment calculer un angle d'après les Ummites ?**

**Une analyse mathématique d'un encadré figurant dans la lettre D59-2** **R Galli 09/2025**

## Introduction

La lettre D59-2 fait partie d'un ensemble de plusieurs lettres numérotées de D 59-1 à D 59-5. Ces lettres constituent globalement une « explication » basique de la théorie de l'espace vue par les Ummites, permettant ensuite d'introduire la notion d'IBOZOO UU.

La plupart des explications dans la D 59-2 sont assorties de dessins à valeur pédagogique, mis à part quelques encadrés en vert ou apparaissent des formules mathématiques.

L'objectif de cet article est de décoder un de ces encadrés, que j'ai placé en Annexe (j'ai choisi l'encadré de la lettre originale en espagnol).

En préambule, je rappelle que les Ummites nous expliquent que le point, la droite, le plan n'existent pas : cela ne veut pas dire que nous n'avons pas le droit de faire de la géométrie et de définir en géométrie des droites, des intersections de droites (considérées comme un point), etc…. Il faut simplement comprendre et admettre que ces notions abstraites de géométrie ne doivent pas être interprétées comme des objets réels dans le WAAM : une particule ne peut être assimilée à un point par exemple. Une droite ne saurait définir un objet réel dans le Cosmos : cet objet n'existe pas physiquement.

Ainsi, il ne peut exister de référentiel cartésien physique et tridimensionnel défini par 3 droites dont chacune définirait une certaine dimension scalaire. D'ailleurs à ce propos, les Ummites nous invitent à reconsidérer vivement notre concept de « dimensions ». Leur concept est en effet totalement différent et fait appel non pas à des grandeurs scalaires mais à des grandeurs angulaires qui correspondent directement à leur description physique de l'espace. Car pour eux, ces grandeurs angulaires ont une base physique, elles existent et sont mesurables. Mais pour comprendre cela, il faut rentrer dans le détail de la description des IBOZOO UU et de la nature des liens les unissant.

Si j'introduis cet article de cette manière, c'est pour bien préciser qu'on a le droit de faire de la géométrie affine, euclidienne et projective, ou autre… mais qu'il ne faut en aucun cas « traduire » les objets abstraits utilisés dans ces géométries en véritables composants physiques de l'espace-temps.

Ce ne sont que des abstractions, qui vont permettre comme on va le voir de définir un angle. Et pour les Ummites, cette notion d'angle qui pourrait paraitre abstraite à première vue décrit concrètement la physique de l'espace-temps.

## Différentes géométries possibles

Si vous voulez une introduction à différents types de géométrie, vous pouvez consulter la référence en français **(1)** Michèle Audin (2006) Géométrie.

On y apprend qu'un espace affine est un ensemble de points, il contient des droites, des plans, et on parle des différentes relations entre ces objets.

Ensuite, on introduit des moyens de faire des mesures de distances et d'angles et on fait alors de la géométrie euclidienne, avec les notions habituelles de rotations, d'isométrie, etc…

Puis vient la géométrie projective : celle-ci a été inventée pour rendre la vie plus facile a priori, puisque l'idée de base était de généraliser la notion d'intersection de deux droites en un point : en géométrie projective, deux droite parallèles se coupent à l'infini, deux plans parallèles se coupent selon une droite à l'infini, etc…. Bien sûr, cela permet d'avoir des énoncés de théorèmes plus nets, mais le prix à payer est d'avoir un cadre un peu plus abstrait mais très riche.

Ensuite, quel que soit le cadre géométrique utilisé, on peut définir des quadriques et des coniques affines. Et bien entendu, on va trouver des coniques et des quadriques projectives en géométrie projective.

Pour les lecteurs intéressés, il faut lire le chapitre VII du livre de Michèle Audin **(1)**, qui explique notamment comment on calcule des intersections de droites et de quadriques, ou des tangentes à une quadrique en partant d'un point.

## L'appel à la géométrie projective dans l'encadré en Annexe

En examinant le texte en Annexe de plus près, on note l'apparition d'hyperplans, et d'hyperplans tangents à une quadrique fondamentale**.** Puis on note l'introduction de R, un birapport formé à partir des plans à l'infini, et ensuite on aboutit au calcul de l'angle grâce à la formule de Laguerre sur laquelle nous reviendrons.

- ⇨ Toutes ces notions font une référence implicite à la géométrie projective.

Une fois que l'on a observé cela, le décodage de l'encadré devient nettement plus limpide. Dans la suite, je vais me contenter de travailler avec n=2 (c'est-à-dire en 3 dimensions), ce qui va me permettre de faire des illustrations à l'aide de Mathematica.

Le texte Ummite évoque deux hyperplans définis chacun par une équation linéaire que je me contente ici de réécrire comme suit :

Plan I   U1 x1+ U2 x2+ U0 x0==0

Plan II V1 x1+ V2 x2 + U0 x0==0

Ensuite, comme il s'agit de calculer un angle, et comme la géométrie projective seule ne connait pas la notion d'angle, il faut pour cela ajouter une quadrique dite fondamentale ou absolue, qui va servir justement à définir beaucoup de choses : la notion d'angle, mais également la notion de distance.

A ce stade, je vais utiliser le livre en référence **(2)** de Richter-Gebert, J. (2011). *Perspectives on projective geometry: A guided tour through real and complex geometry* Heidelberg: Springer.

Dans les exemples ci-après, on utilisera alors une formulation la plus standard possible d'une quadrique **(2)** paragraphe 21.3, qui sera de la forme suivante en respectant les notations des Ummites :

$$Q == \mathrm{X1}^2 + \mathrm{X2}^2 + \frac{\mathrm{X0}^2}{\lambda^2}$$

Cette équation provient de l'utilisation de la matrice diagonale M suivante :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{matrix}$$

On obtient l'équation de la quadrique à partir de {X1, X2, X0} et de M de la manière suivante :

$$Q == Transpose[\{X1, X2, X0\}] . \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{matrix} . \{X1, X2, X0\}$$

Chose importante citée par les Ummites dans l'encadré : $\lambda$ est non nul, et peut être réel ou imaginaire.

Dans la suite, on utilisera pour les illustrations $\lambda == 1$ et $\lambda == I$ imaginaire pur.

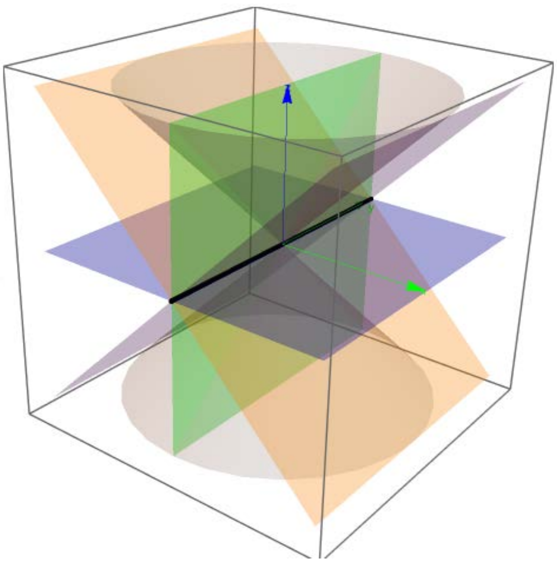
Nous sommes maintenant équipés pour donner un exemple simple.

**Dans le graphique suivant,** je représente deux plans X0=0 en bleu et X1=0 en vert. L'axe X1 est représenté par le vecteur vert, l'axe X0 par le vecteur bleu.

La conique est une conique projective représentant les points à l'infini et doit ici s'écrire Q==0. Avec $\lambda^2 == -1$ , on obtient un cône d'équation X1^2+X2^2== X0^2 en gris. L'axe X0 est vertical.

Les deux plans (bleu et vert) se coupent selon la droite X2 représentée en noir gras.

C'est là qu'intervient la notion de **faisceau (haz en espagnol)** : en effet, si on fait tourner un de nos deux plans autour de la droite X2, on obtient tout un faisceau continu de plans. C'est ici qu'il faut déterminer les plans à l'infini : ce sont les plans orange et violet, qui sont tangents à la quadrique projective Q==0. Tous ces plans sont paramétrés par une seule variable dans le faisceau considéré, ce qui est bien expliqué dans **(2)** page 407.



Je passe les calculs mais je donne les principaux résultats concernant cette figure :

- Le birapport R vaut ici -1.
- Si on applique **la formule de Laguerre** (fournie explicitement dans l'encadré) :

⇨ $\theta == 1/(2I)\,\mathrm{Log}[R]$ on obtient bien $\theta == \mathrm{Pi}/2$ quand R== - 1.

Tel est le principe que nous rappellent les Ummites car tout cela existe depuis plus d'un siècle.

La méthode est la suivante :

- ⇨ On considère le faisceau engendré par les deux plans (plus généralement les hyperplans)
- ⇨ On détermine les deux plans tangents à une certaine quadrique absolue : je dis certaine, car si on change de quadrique, les angles seront différents comme on va le voir
- ⇨ On détermine le birapport R
- ⇨ Puis on calcule l'angle via la formule de Laguerre en faisant attention à certains signes +ou -.

**Quelques exemples en 3 D en faisant varier $\lambda^2$**

On reste en 3D et on conserve notre quadrique projective
$Q == \mathrm{X1}^2 + \mathrm{X2}^2 + \frac{\mathrm{X0}^2}{\lambda^2}$==0

On considère toujours les deux plans

U1 X1+ U2 X2+ U0 X0==0    et V1 X1+ V2 X2 + U0 X0==0

On applique la méthode ci-dessus, et on détermine les plans tangents du faisceau à la quadrique projective. Ces plans tangents sont paramétrés par une variable t, solution de l'équation suivante :

$$t^2 2[\mathrm{U1}^2 + \mathrm{U2}^2 + \frac{\mathrm{U0}^2}{\lambda^2}] + t2[2\mathrm{U1V1} + 2\mathrm{U2V2} + \frac{2\mathrm{U0V0}}{\lambda^2}] + 2[\mathrm{V1}^2 + \mathrm{V2}^2 + \frac{\mathrm{V0}^2}{\lambda^2}] == 0$$

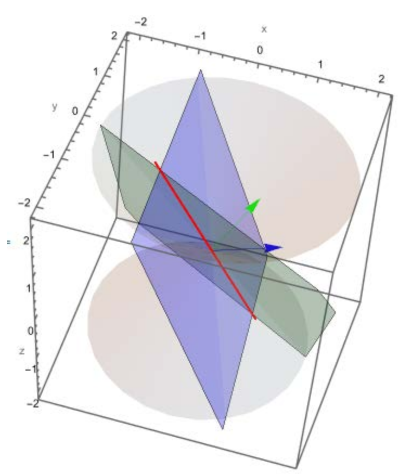
Cette équation est une généralisation de celle fournie par **(1)** au chapitre VII, page 240, et que l'on retrouve explicitement dans la référence **(2)**.

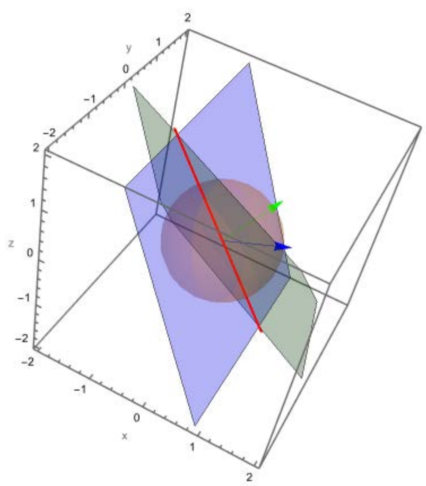
La suite du calcul permet de calculer le birapport et l'angle selon la formule de Laguerre.

Cette fois ci, j'ai choisi deux plans quelconques représentés ci-après, avec leur droite d'intersection en rouge. Les vecteurs vert et bleu représentent {U1, U2, U0} et {V1, V2, V0}.

Pour $\lambda^2 == -1$, on obtient des plans tangents imaginaires, et le birapport est également imaginaire. L'angle obtenu vaut 68 ° en valeur absolue (figure ci-dessous à gauche). Le cône est réel.

Pour $\lambda^2 == 1$, la quadrique fondamentale est une sphère imaginaire. Les plans tangents sont également imaginaires, ainsi que le bi rapport. L'angle obtenu est plus faible et vaut 54° en valeur absolue, ce qui est conforme à la valeur obtenue directement en géométrie euclidienne sans faire tout ce parcours. Ceci montre que le choix de la quadrique va induire un angle a priori différent.





La représentation de la sphère est purement symbolique, car il s'agit en réalité d'une sphère à l'infini.

**Les formules du Cosinus et du Sinus**

**Le cosinus** entre deux vecteurs est simplement le produit scalaire entre ces deux vecteurs ramenés chacun à leur vecteur unitaire. Mais il faut bien entendu prendre en compte la matrice M qui provient de la forme quadratique définissant la quadrique fondamentale.

Pour $\lambda == 1$ , on se situe dans une géométrie purement euclidienne avec une sphère imaginaire à l'infini et les termes diagonaux sont {1,1,1}.

Pour $\lambda == I$ , on se situe dans le modèle hyperbolique de Minkowski et les termes diagonaux sont {1,1,-1}

Plus généralement, $\lambda$ est un facteur d'échelle et il permet d'ajuster le poids relatif d'un axe par rapport aux autres : c'est ce qui se passe dans une métrique classique de type Minkowski donnant l'élément de longueur ds, avec ici x0 équivalent au temps t :

- ⇨ ds^2== - c^2 dx0^2+dx1^2+dx2^2+dx3^2.

La matrice diagonale s'écrit plus généralement {1,1,1/$\lambda^2$}.

Dans une métrique non-euclidienne (avec le signe – devant c^2 dx0^2), on peut alors aisément identifier -c^2==1/ λ^2. C'est pour cela que j'ai choisi mon écriture des composantes des vecteurs qui semblait un peu particulière pour définir U et V : dans le texte Ummite, seule la composante U0 est affectée par ce coefficient 1/ λ : cela peut suggérer que cet axe se comporte différemment des autres, et cet axe pourrait être le temps, pondéré par la vitesse de la lumière, comme dans la métrique de Minkowski.

Revenons maintenant au Cosinus, et utilisons la référence **(2).**

Avec U= {U1, U2, U0} et V = {V1, V2, V0}, on obtient :

$$\cos(\theta) == \frac{U^T.M.V}{\sqrt{U^T.M.U}\sqrt{V^T.M.V}}$$

Avec les valeurs suivantes :

$$U^T.M.U == \mathrm{U1}^2 + \mathrm{U2}^2 + \frac{\mathrm{U0}^2}{\lambda^2}$$

$$U^T.M.V == \mathrm{U1V1} + \mathrm{U2V2} + \frac{\mathrm{U0V0}}{\lambda^2}$$

$$V^T.M.V == \mathrm{V1}^2 + \mathrm{V2}^2 + \frac{\mathrm{V0}^2}{\lambda^2}$$

- ⇨ <u>On retrouve bien la formule du Cosinus du texte Ummite au facteur ε près.</u>

**Les cosinus directeurs** pour chaque vecteur sont simplement :

{U1,U2,U0}/$\sqrt{U^T.M.U}$ et {V1,V2,V0}/$\sqrt{V^T.M.V}$ et définissent différents angles nommés explicitement <u>angles dimensionnels</u> dans l'encadré. Ce que veulent dire ici les Ummites selon moi, c'est qu'il ne faut pas considérer ici trois dimensions spatiales au sens où nous l'entendons, mais trois angles fondamentaux exprimant 3 dimensions-angulaires différentes.

**Pour le Sinus**, la formule est plus compliquée car celui-ci est défini non pas avec le produit scalaire mais avec le produit vectoriel. Plutôt que de passer par la matrice M diagonale définie ci-dessus, on peut partir directement des vecteurs [U1,U2,U0/ $\lambda$ } et {V1,V2,V0/ $\lambda$ } et utiliser une matrice identité histoire de simplifier les calculs. En faisant cela, et en utilisant la définition classique du produit vectoriel, on trouve bien la formulation Ummite au facteur ε près.

**Qu'en est-il maintenant du terme ε** des formulations Ummites ? On s'aperçoit que l'élévation au carré du Cos donne toujours la même valeur. En revanche, l'élévation au carré du Sin dépend du signe de ε situé sous la racine.

Il faut alors comprendre que si ε==1, on se situe dans le domaine euclidien classique, et on obtient bien Cos^2+Sin^2==1.

En revanche, si ε== **-**1, nous sommes dans le domaine de la géométrie hyperbolique. Et dans ce cas, on obtient quelque chose comme Cos^2**-**Sin^2==1 : il faut alors lire les fonctions comme des fonctions hyperboliques selon les cas, car Cosh^2-Sinh^2==1.

Si donc on creuse encore un peu, on s'aperçoit que les vecteurs utilisés dans mon dernier exemple sont spacelike au sens de Minkowski. Dans ce cas, la relation :

$\cos(\theta) == \frac{U^T.M.V}{\sqrt{U^T.M.U}\sqrt{V^T.M.V}}$ s'applique sans ambiguïté.

Mais si les vecteurs étaient timelike, on aurait abouti à :

$\cosh(\theta) == \frac{-\,U^T.M.V}{\sqrt{U^T.M.U}\sqrt{V^T.M.V}}$ c'est-à-dire ε==-1 et on aurait dû employer le Cosh. L'angle ainsi défini est la rapidité relativiste, et est préservée via les transformations de Lorentz.

Cela signifie que l'angle ou la rapidité ainsi définis sont des invariants relativistes, car les transformations de Lorentz sont des transformations qui préservent la forme quadratique de Minkowski, c'est-à-dire la matrice M.

Tout cela donne à réfléchir sur l'interprétation que nous faisons de la relativité restreinte, et au fait que les angles s'additionnent tout simplement comme expliqué ci-après :

**(3)** Goldoni, G. (2007). Rapidity: The physical meaning of the hyperbolic angle in special relativity. *Resonance*, *12*(7), 86-91.

Un petit résumé de cet article :

« La rapidité est l'équivalent relativiste de l'angle en géométrie : elle exprime la séparation entre deux référentiels par une **mesure additive, naturelle et invariante**. Ce n'est pas un simple « truc mathématique », mais bien une grandeur physique mesurable, qui exprime directement la réalité géométrique de l'espace-temps de Minkowski ».

**<u>En guise de conclusion</u>**

Nous voici donc maintenant capables de déterminer un angle entre deux directions grâce à la géométrie projective, et ceci dans un espace à N dimensions. Mais le sens de dimension est différent dans les textes Ummites et la traduction qu'ils en font correspondrait au terme OAWOO.

Je cite J Pollion : « Ce mot désigne, selon les indications associées, les axes, rayons vecteurs, dimensions orientées. Ces "axes" sont l'objet de variations angulaires combinées, mutuelles, témoins de leurs interactions permanentes ».

Dans cet article, les rayons vecteurs utilisés sont ceux qui définissent les hyperplans, d'où l'importance de calculer l'angle entre deux hyperplans. Cette notion d'angle est en effet pour les Ummites fondamentale, et d'ailleurs dans D 59-2, il est nommé IOAWOO, ou encore <u>angle-dimension</u>. Dans la théorie des IBOZOO UU (IU), un tel angle ne peut être défini qu'entre deux IU, qui sont les entités fondamentales de la physique Ummite. Définir un angle pour un IU seul n'a aucun sens, car il faudrait revenir à la notion abstraite de droite de référence qui n'existe pas en tant qu'objet physique.

<u>L'IOAWOO mesure ainsi l'écart angulaire entre deux OAWOO selon la méthode de l'encadré.</u>

Il est clair également que pour les Ummites, les IU existent même s'ils ne sont pas arrivés à les détecter. L'hypothèse de leur existence repose sur le fait que leur modèle de physique élaboré sur cette existence physique satisfait jusqu'à maintenant à toutes les explications.

C'est en cela que diffère la structuration de la physique Ummite : elle est basée sur des angles dimensionnels définis à partir d'au moins deux objets physiques (certes hypothétiques), et non sur une structuration mathématique faisant intervenir des axes dimensionnels scalaires qui n'ont aucune existence physique.

On a également bien noté que les Ummites s'appuient sur un espace-temps de type Minkowski, mais plongé dans une trame à N-dimensions (D 59-1). Cela signifie un intérêt certain pour la géométrie hyperbolique avec ici $\lambda^2 == -1/c$^2, conduisant à une métrique de type

ds^2== - c^2 dx0^2+dx1^2+dx2^2+dx3^2+….+dxn^2.

Les Ummites ne se privent pas de faire de la géométrie (avec des points, des droites, etc.), de la géométrie projective et même de la géométrie hyperbolique comme le montrent les illustrations im 17 et im 18 de l'encadré.

Simplement, ils insistent sur le fait que quand on fait de la physique, il faut s'appuyer sur des objets physiques (même hypothétiques) pour structurer les bases de leurs théories et ainsi pouvoir décrire le monde physique. Cela parait logique quand on y pense !

Les mathématiques Ummites sont somme toute peu différentes des nôtres (*), et l'analyse de cet encadré, faisant appel à la géométrie projective, l'illustre parfaitement : il faut comprendre les mathématiques comme des outils pour décrire le monde réel.

Et pour eux, ce monde réel doit être décrit sur la base d'angles réels, d'où l'importance de bien définir cette notion.

(*) Y compris d'ailleurs la logique tétravalente, que nous connaissons sur le plan mathématique, mais que nous utilisons très peu pour l'instant en physique ou en informatique.

**Annexe** **Encadré de la lettre originale en espagnol**

Es preciso que recuerden el concepto de ángulo en un HIPERESPACIO

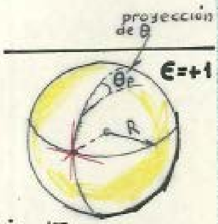
$\breve{\theta} = \breve{\theta}(\breve{P}, \breve{Q})$ siendo $\breve{P}$ y $\breve{Q}$

dos HIPERPLANOS definidos por las coordenadas $U = (U_0\ U_1\ U_2 \ldots\ldots U_n)$ y $V = (V_0\ V_1\ V_2 \ldots\ldots V_n)$

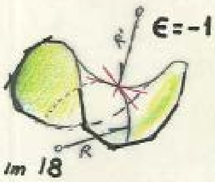
Ambos HIPERPLANOS determinan un haz $\Gamma$. Pues bien: en este $\Gamma$ hay dos HIPERPLANOS $\breve{P}_\infty$ y $\breve{Q}_\infty$ que son tangentes a la cuádrica fundamental $\Sigma$

El ángulo $\breve{\theta} = \breve{\theta}(\breve{P}\breve{Q})$ (en el que $0 \leq \breve{\theta} \leq \breve{P}$) entre estos dos HIPERPLANOS $\breve{P}$ y $\breve{Q}$, está definido por

$$\breve{\theta} = \breve{\theta}(\breve{P}, \breve{Q}) = \frac{1}{2i} \cdot \lg.R(\breve{P}\breve{Q}, \breve{P}_\infty \breve{Q}_\infty)$$




im. 17




im 18

Este ángulo se define por las ecuaciones :

[ No podemos representar $\breve{\theta}$ en una imágen. Nos limitamos a reproducir la Proyección $\theta_p$ de $\breve{\theta}$. $\theta_p$ vendrá expresado por dos planos meridianos en el caso de $\breve{\theta}$ para un N-espacio de orden N=4

$$\cos \breve{\theta} = \frac{\epsilon\left[\frac{U_0 V_0}{\lambda^2} + U_1 V_1 + U_2 V_2 + \cdots\cdots U_n V_n\right]}{\sqrt{\left[\frac{U_0^2}{\lambda^2} + U_1^2 + \cdots + U_n^2\right] \cdot \left[\frac{V_0^2}{\lambda^2} + V_1^2 + \cdots + V_n^2\right]}}$$

$$\operatorname{sen} \breve{\theta} = \sqrt{\frac{\epsilon\left[\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{i=n}\begin{vmatrix} U_0 & U_i \\ V_0 & V_i \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\begin{vmatrix} U_i & U_j \\ V_i & V_j \end{vmatrix}^2\right]}{\left(\frac{U_0^2}{\lambda^2} + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2\right)\left(\frac{V_0^2}{\lambda^2} + V_1^2 + \cdots + V_n^2\right)}}$$

$\lambda \neq 0$ ó $\lambda$ = N°real ó $\lambda$ = imaginario

En las que $\epsilon = +1$ puesto que estamos suponiendo una HIPERESFERA de Curvatura positiva ( Caso del modelo ficticio del IBOZOO UU.

( Recordamos la diferencia entre ESFERA de curvatura positiva ( IMAGEN 17 y una Superficie esférica de curvatura negativa ( imagen 18 ) que ayuden a comprender los conceptos de HIPERESFERA DE curvaturas $\epsilon = +1$ y $\epsilon = -1$

Pues bien: Cuando $R(\breve{P}\ \breve{Q}, \breve{P}_\infty\ \breve{Q}_\infty) = -1$ consideramos que ambos HIPERPLANOS son ortogonales.

Si sustituyen ustedes el concepto de OOAWOO ( Radio VECTOR ) lineal de nuestro modelo anterior más simplista, por el de HIPERPLANO de orden N= 4 y suponen estos HIPERPLANOS de referencia, no en el propio IBOZOO UU en estudio, sino en otro ligado a el , podemos imaginar tres cosenos directores a los que denominaremos $\cos \breve{\Psi}$ $\cos \breve{\Xi}$ $\cos \breve{\Omega}$ [Utilizamos notaciones con caracteres de Grecia]

Que nos definirán otros tantos ángulos $(\breve{\Psi}, \breve{\Xi}\ \breve{\Omega})$ que definimos como IOAWOO ( ANGULOS DIMENSIONALES ) que nos definirán cada uno los respectivos valores del espacio tridimensional tal como lo concebimos. Se supone que una variación infinitesimal en el valor de estos cosenos directores supone una pareja ligada de IBOZOO UU.